Soal dan Solusi
Logika UI 2022
Mathematics Individual Competition
Semifinal Round: Bagian Kedua

Wildan Bagus Wicaksono

Updated 28 Januari 2022

§1 Soal

Tuliskan setiap langkah Anda hingga mendapatkan jawaban akhir dengan jelas dan detail. Setiap soal memiliki bobot 10 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab.

Problem 1. Misalkan fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \left(7x^2 + 7\right)^{\frac{1}{2}} + \left(7x^2 - 14x + 14\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tentukan nilai minimum $f(x)$ dan nilai x ketika $f(x)$ minimum.

Problem 2. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang sisi $AB = 13, BC = 5$, dan $AC = 12$. Misalkan titik I adalah pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$, titik O adalah pusat lingkaran luar $\triangle ABC$, titik N adalah pusat lingkaran luar $\triangle BIC$, titik M adalah pusat lingkaran luar yang menyinggung sisi AC, BC, dan lingkaran luar $\triangle ABC$. Tentukan luas segitiga IMN.

§2 Soal dan Solusi

Problem 1

Misalkan fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \left(7x^2 + 7\right)^{\frac{1}{2}} + \left(7x^2 - 14x + 14\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tentukan nilai minimum $f(x)$ dan nilai x ketika $f(x)$ minimum.

Jawabannya adalah $\boxed{\sqrt{35}}$ yang tercapai ketika $\boxed{x = \frac{1}{2}}$.
Tinjau bahwa $f(x)$ ekuivalen dengan

$$f(x) = \sqrt{7} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+2}\right).$$

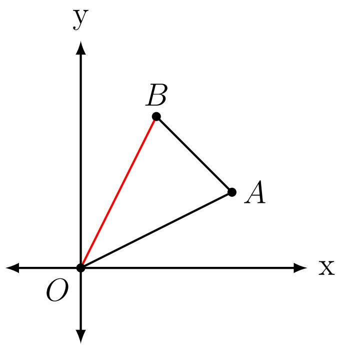
Sekarang, akan kita cari nilai minimum dari $g(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+2}$ yang diselesaikan dengan dua alternatif berikut.

Alternatif 1: Interpretasi Geometri

Perhatikan bahwa $g(x)$ ekuivalen dengan

$$g(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (1-2)^2}.$$

Buat titik $A = (x, 1), B = (1, 2)$, dan $O = (0, 0)$ pada bidang kartesius. Maka nilai dari $g(x)$ ekuivalen dengan jumlah panjang $AB + AO$.



Berdasarkan ketaksamaan segitiga, berlaku $OA + AB \geq OB$, di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika O, A, dan B terletak segaris. Maka nilai minimum dari $AO + OB$ tercapai ketika A, O, B segaris. Sehingga

$$AO + OB \geq OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Sekarang, akan kita cari nilai x sehingga $AO + OB$ minimum, yaitu ketika A berada di garis OB. Persamaan garis OB adalah $\overleftrightarrow{OB} \equiv y = 2x$. Karena A berada di garis OB, maka haruslah $2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$. Maka kita peroleh bahwa nilai minimum $f(x)$ adalah $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{35}$ dan tercapai ketika $x = \frac{1}{2}$.

Alternatif 2: Turunan

Tinjau

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Nilai minimum tercapai ketika $g'(x) = 0$. Maka

$$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \iff \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Kuadratkan kedua ruas dan kalikan silang sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned}
(1-x)^2\left(x^2+1\right) &= x^2\left(x^2-2x+2\right) \\
\left(1-2x+x^2\right)\left(x^2+1\right) &= x^4-2x^3+2x^2 \\
x^2+1-2x^3-2x+x^4+x^2 &= x^4-2x^3+2x^2 \\
x^4-2x^3+2x^2-2x+1 &= x^4-2x^3+2x^2 \\
x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$g''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} + \frac{\sqrt{x^2-2x+2} - \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2-2x+2} \implies g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{5\sqrt{5}} > 0.$$

Maka $x = \frac{1}{2}$ adalah penyebab fungsi $g(x)$ bernilai minimum. Kita punya nilai minimum $f(x)$ adalah

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{7} \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{35}.$$

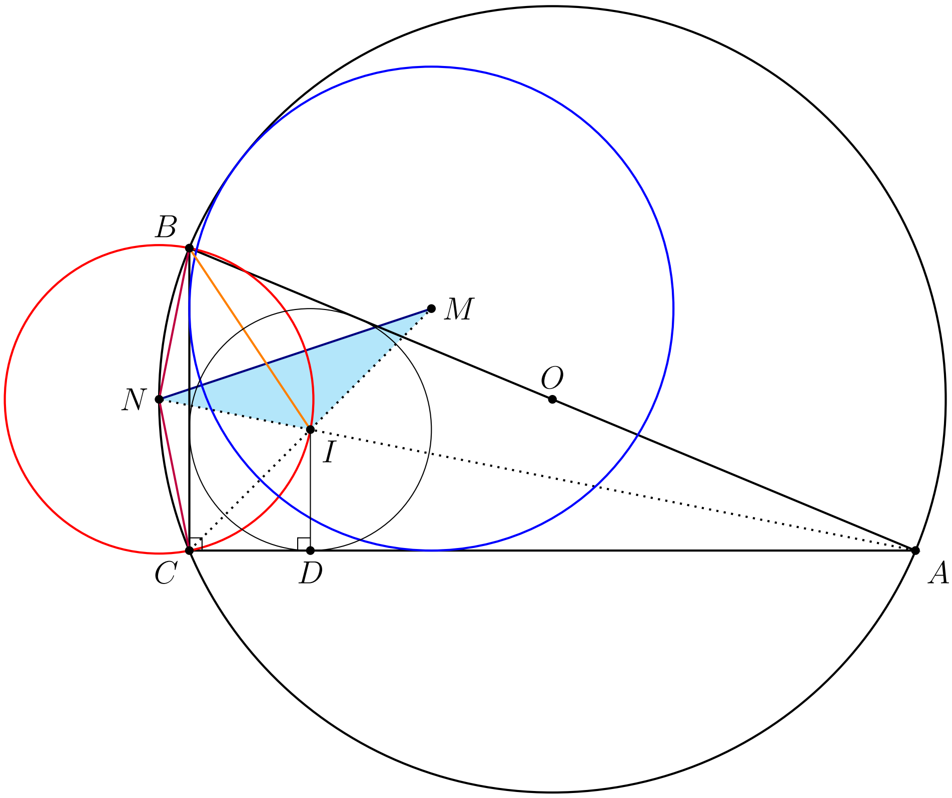
Jadi, nilai minimum dari $f(x)$ adalah $\boxed{\sqrt{35}}$ yang tercapai ketika $\boxed{x = \frac{1}{2}}$.

Problem 2

Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang sisi $AB = 13, BC = 5$, dan $AC = 12$. Misalkan titik I adalah pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$, titik O adalah pusat lingkaran luar $\triangle ABC$, titik N adalah pusat lingkaran luar $\triangle BIC$, titik M adalah pusat lingkaran luar yang menyinggung sisi AC, BC, dan lingkaran luar $\triangle ABC$. Tentukan luas segitiga IMN.

Proposed by Tahta Aulia

Jawabannya adalah 3.



Misalkan lingkaran dalam $\triangle ABC$ menyinggung AC di D.

Lemma 2.1 (Mixtilinear)

C, I, M segaris.

Bukti. Kita sebut lingkaran yang berpusat di M sebagai $C-$Mixtilinear. Lingkaran $C-$Mixtilinear menyinggung AC dan BC, begitu pula dengan lingkaran dalam $\triangle ABC$ juga menyinggung AC dan BC. Artinya, terdapat suatu dilatasi dengan pusat C yang membawa lingkaran dalam $\triangle ABC$ ke $C-$Mixtilinear. Kita simpulkan juga bahwa dilatasi tersebut membawa titik I ke titik M. Maka C, I, M segaris. $\square$

Lemma 2.2 (Incenter-Excenter Lemma)

A, I, N segaris dan $N \in (ABC)$.

Bukti. Misalkan garis AI memotong (ABC) di titik N'. Karena $ABN'C$ siklis, maka

$$\angle N'BC = \angle N'AC = \angle N'AB = \angle N'CB \implies \angle N'BC = \angle N'CB.$$

Maka panjang $N'B = N'C$. Tinjau juga

$$\angle N'IC = \angle ICA + \angle IAC = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle A}{2} = 45^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

Di sisi lain,

$$\angle N'CI = \angle N'CB + \angle ICB = \angle N'AB + \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A}{2} + 45^\circ = \angle N'IC.$$

Karena $\angle N'CI = \angle N'IC$, maka panjang $N'I = N'C$. Kita punya panjang $N'I = N'C = N'B$, maka N' adalah titik pusat (BIC). Kita simpulkan bahwa $N = N'$ dan kita peroleh seperti pada **Lemma 2.2**. □

Misalkan $\angle A = 2\alpha$ dan $\angle B = 2\beta$. Tinjau bahwa

$$\angle NIM = 180^\circ - \angle NIC = 180^\circ - (45^\circ + \alpha) = 135^\circ - \alpha.$$

Tinjau bahwa

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{AC}{AB}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Kita punya juga $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{5}{\sqrt{26}}$. Tinjau bahwa $\angle C = 90^\circ$, maka AB merupakan diameter (ABC). Sehingga panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah $R = \frac{AB}{2} = \frac{13}{2}$. Dari **Lemma 2.2** dan aturan sinus $\triangle ACN$, maka

$$NI = NC = 2R\sin\angle CAN = 2\cdot\frac{13}{2}\sin\alpha = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Tinjau dilatasi yang berpusat di C dan membawa lingkaran dalam $\triangle ABC$ ke $C-$Mixtilinear. Kita gunakan fakta bahwa jari-jari $C-$Mixtilinear adalah $r_C = r\sec^2\left(\frac{\angle C}{2}\right) \iff \frac{r_C}{r} = \sec^2\left(\frac{\angle C}{2}\right)$ di mana r adalah jari-jari lingkaran dalam $\triangle ABC$. Dengan kata lain, dilatasi yang berpusat di C dan membawa lingkaran dalam $\triangle ABC$ ke $C-$Mixtilinear memiliki rasio $\sec^2\left(\frac{\angle C}{2}\right) = 2$. Maka panjang $CI = IM$. Tinjau bahwa panjang $CD = s - AB = 15 - 13 = 2$ di mana $2s = AB + BC + CA$. Tinjau $\triangle CID$, karena $\angle DCI = 45^\circ \implies \angle CID = 45^\circ$, maka panjang $DI = CD = 2$. Sehingga panjang $IM = CI = CD\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Perhatikan bahwa

$$\sin\angle NIM = \sin(135^\circ - \alpha) = \sin 135^\circ\cos\alpha - \cos 135^\circ \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Maka

$$[IMN] = \frac{1}{2}\cdot IM\cdot IN\cdot\sin\angle NIM = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \boxed{3}.$$